

## ΘΕΩΡΙΕΣ ΑΣΤΟΧΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ ΥΠΟ ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΑΤΑΠΟΝΗΣΗ

Σ.Κ. ΚΟΥΡΚΟΥΛΗΣ

Η ραγδαία ανάπτυξη της επιστήμης της εμβιομηχανικής κατά τα τελευταία χρόνια έφερε σε στενή επαφή δύο θεωρητικά μη συναφείς επιστημονικούς κλάδους: την Ιατρική και τη Μηχανική. Ειδικότερα, τα επιτεύγματα στο μέτωπο της εμβιομηχανικής της σπονδυλικής στήλης κατέστησαν αδήριτη την ανάγκη αρμονικής συνεργασίας μεταξύ των θεραπόντων του κλάδου της Ορθοπαιδικής (από την πλευρά της Ιατρικής) και των θεραπόντων του κλάδου της Αντοχής των Υλικών (από την πλευρά της Μηχανικής), δεδομένου ότι πλείστα όσα καθαρά τεχνικής φύσεως προβλήματα πρέπει να επιλύονται από τον ορθοπαιδικό, προκειμένου η ενίσχυση της σπονδυλικής στήλης με μηχανικά μέσα να είναι αποτελεσματική και ανθεκτική στο χρόνο.

Για να είναι, όμως, αρμονική μία τέτοια συνεργασία, απαιτείται κατ' αρχήν η θεμελίωση κοινής ορολογίας και γλώσσας επικοινωνίας μεταξύ Ιατρών και Μηχανικών. Ένα πρώτο βήμα προς αυτή την κατεύθυνση αποτελεί και η παρούσα εργασία. Συγκεκριμένα, καταβάλλεται προσπάθεια για μία κατά το δυνατόν απλουστευμένη ανάλυση ενός ιδιαίτερα σημαντικού προβλήματος, της Αντοχής των Υλικών, αυτού της αστοχίας των υλικών, όταν αυτά υποβάλλονται σε σύνθετη (πολυαξονική) καταπόνηση. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζει συχνά ο ασχολούμενος με την ενίσχυση της σπονδυλικής στήλης ορθοπαιδικός, δεδομένου ότι τα οστά της σπονδυλικής στήλης, και επομένως και τα υλικά της σπονδυλοδεσίας, υφίστανται σύνθετη καταπόνηση συγκείμενη από ορθές φορτίσεις (θλιπτικές και καμπτικές) σε συνδυασμό με διαμητρικές φορτίσεις (στρεπτικές).

Κατ' αρχήν ορίζεται η έννοια της αστοχίας και εισάγονται οι έννοιες της τάσεως και της παραμορφώσεως, έννοιες απαραίτητες για την περιγραφή των κριτηρίων αστοχίας, των οριακών δηλαδή εκείνων συνθηκών η εκπλήρωση των οποίων επιφέρει την αστοχία. Στη συνέχεια περιγράφονται συνοπτικά τα κυριότερα κριτήρια αστοχίας, τα οποία χρησιμοποιούνται σήμερα στην επιστήμη της Αντοχής των Υλικών. Η παρουσίαση είναι κριτική και σκοπό έχει να αναδείξει τους περιορισμούς οι οποίοι ευνυπάρχουν στη θεμελίωση των κριτηρίων αυτών, περιορισμοί οι οποίοι καθιστούν εφικτή τη χρησιμοποίησή τους μόνο για συγκεκριμένες κατηγορίες υλικών. Τέλος, παρουσιάζονται οι νεότερες εξελίξεις στο πεδίο της αστοχίας των υλικών και αναλύονται τρία από τα πλέον προσφάτως εισαχθέντα κριτήρια, τα οποία και θεραπεύουν ορισμένες από τις αδυναμίες των αντιστοίχων κλασικών κριτηρίων και τα οποία τυγχάνουν ήδη ευρείας σχετικώς χρήσεως.

Τονίζεται όμως, ήδη από το σημείο αυτό, ότι λυδία λίθος για οποιοδήποτε κριτήριο αστοχίας αποτελεί η επαλήθευσή του από την πειραματική εμπειρία, δεδομένου ότι όπως απεφάνθη ήδη, από το 1900, αυτός ο ίδιος ο Otto Mohr (εισηγητής ενός εκ των ευρυτάτης αποδοχής κριτηρίων αστοχίας) στη θεμελιώδη για την Αντοχή των Υλι-

κών εργασία του<sup>6</sup>, η θεωρητική αναζήτηση ενός απολύτου (γενικού) κριτηρίου αστοχίας είναι χίμαιρα.

### Η αστοχία των υλικών

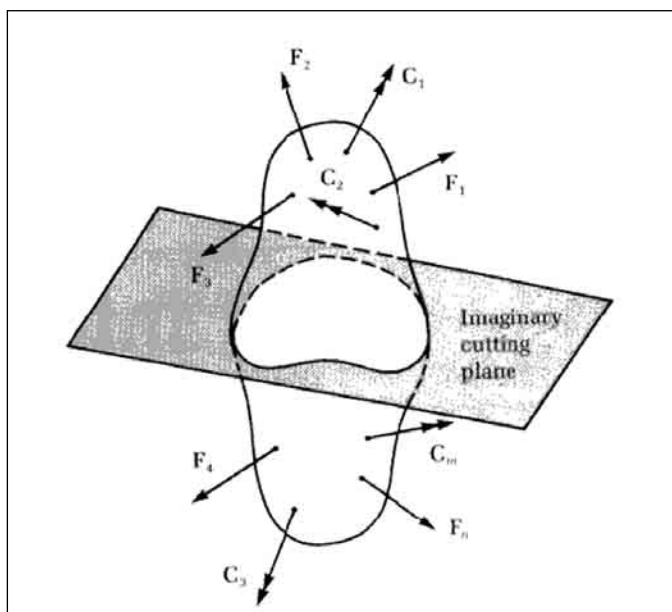
Δεν είναι εύκολο να δοθεί ένας σαφής και μονοσήμαντος ορισμός της έννοιας της αστοχίας των υλικών και επομένως και των κριτηρίων αστοχίας. Μπορούμε όμως να πούμε, με αρκετή δόση ασάφειας, ότι αστοχία είναι η μετάβαση ενός υλικού από την επιθυμητή συμπεριφορά της ασφαλούς μεταφοράς των εξωτερικώς επιβαλλόμενων φορτίων, στην ανεπιθύμητη συμπεριφορά, όπου η μεταφορά των φορτίων καθίσταται επισφαλής. Κατ'έπекταση, οι οριακές εκείνες συνθήκες οι οποίες καθορίζουν τα όρια μεταξύ των ασφαλώς και των μη ασφαλώς μεταφερομένων φορτίων, αποτελούν τα κριτήρια αστοχίας των υλικών. Η μετάβαση από την επιθυμητή στη μη επιθυμητή συμπεριφορά είναι αποτέλεσμα εσωτερικών μεταβολών στη δομή του υλικού, οι οποίες και μετατρέπουν την αρχικώς αντιστρεπτή αντίδραση των υλικών στις εξωτερικώς επιβαλλόμενες φορτίσεις σε θερμοδυναμικώς μη αντιστρεπτή, στην οποία η αφαίρεση των εξωτερικών απίων, δηλαδή των φορτίων, δεν ισοδυναμεί με την πλήρη αναίρεση των αποτελεσμάτων τους, δηλαδή των μεταβολών στο σχήμα και στον όγκο των υλικών. Σημειώνεται στο σημείο αυτό ότι με τον όρο φορτία εννοούμε τόσο τις δυνάμεις όσο και τις ροπές, αλλά πιθανόν και τις μετατοπίσεις που επιβάλλονται στα υλικά, και φυσικά όλους τους δυνατούς συνδυασμούς τους.

Εν γένει, η αστοχία των υλικών μπορεί να διακριθεί σε διαρροή και σε θραύση. Η αστοχία με διαρροή αντιστοιχεί στην πρώτη εμφάνιση μη αντιστρεπτών (πλαστικών) πα-

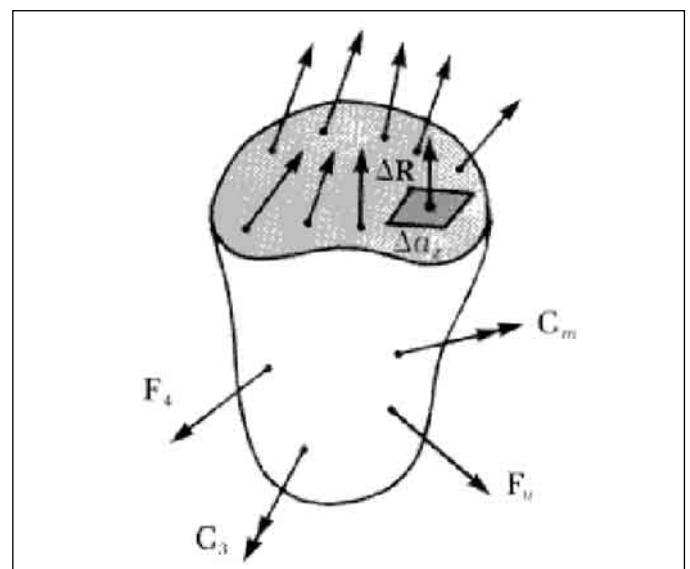
ραμορφώσεων και συνδέεται με τα όλκιμα υλικά, ήτοι τα υλικά τα οποία πριν καταστούν μη λειτουργικά εμφανίζουν σημαντικές μακροσκοπικές παραμορφώσεις (χαλκός, μόλυβδος, ορισμένες ποικιλίες χάλυβος, ελαστομερή). Αντίθετα, η αστοχία με θραύση αντιστοιχεί στη μακροσκοπική λύση της συνέχειας του υλικού (σπάσιμο) και αναφέρεται στα ψαθυρά υλικά, ήτοι τα υλικά τα οποία πριν την καταστροφή τους εμφανίζουν ασήμαντες μακροσκοπικές παραμορφώσεις (χυτοσίδηρος, ύαλος, PMMA ή Plexiglas).

Οι οριακές συνθήκες με βάση τις οποίες επιβάλλεται να γίνεται ο σχεδιασμός οποιουδήποτε δομικού μέλους (είτε πρόκειται για την πτέρυγα ενός γιγαντιαίου αεροσκάφους είτε πρόκειται για τη μικροσκοπική ράβδο συστήματος σπονδυλοδεσίας), δύνανται να συνοψισθούν στις κάτωθι:

- Το επιβαλλόμενο φορτίο να μην υπερβαίνει το φορτίο υπό το οποίο εμφανίζονται στο υλικό οι πρώτες μη αντιστρεπές παραμορφώσεις.
- Το επιβαλλόμενο φορτίο να μην υπερβαίνει το φορτίο υπό το οποίο οι μη αντιστρεπές παραμορφώσεις υπερβαίνουν κάποια οριακή τιμή (η οποία ορίζεται κατά το μάλλον ή ήπτον αυθαίρετα από τους αντίστοιχους κανονισμούς).
- Η μέγιστη ελαστική μετατόπιση να μην υπερβαίνει κάποιο (επίσης αυθαίρετο) κρίσιμο όριο.
- Το επιβαλλόμενο φορτίο να μην υπερβαίνει το φορτίο υπό το οποίο η αρχικώς ελαστική ευστάθεια (ισορροπία) μετατρέπεται σε ασταθή, η οποία οδηγεί στο φαινόμενο του λυγισμού.
- Το φορτίο να μην υπερβαίνει το φορτίο εκείνο το οποίο θα προξενήσει θραύση, περίπτωση η οποία συμπεριλαμβάνει και την αστοχία υπό φορτία κοπώσεως (επα-



**Σχήμα 1.** Στερεό σώμα υπό γενικευμένη φόρτιση.



**Σχήμα 2.** Η δράση του αποτμηθέντος τμήματος του σώματος ώστε να διατηρείται η ισορροπία.

να λαμβανόμενα στο χρόνο μικρού σχετικώς μεγέθους φορτία).

- Το επιβαλλόμενο φορτίο να μην προσεγγίζει το κρίσιμο εκείνο φορτίο το οποίο θα προξενήσει συντονισμό της κατασκευής.

Ανεξαρτήτως, όμως, της οριακής συνθήκης, η οποία θα επιλεγεί από το σχεδιαστή αναλόγως της φύσεως και της λειτουργίας του δομικού μέλους ή της κατασκευής, η μαθηματική μορφή της συνθήκης απαιτείται να εκφράζεται με όρους τάσεων (stresses) και ανηγμένων παραμορφώσεων (strains). Τους δύο αυτούς όρους θα επιχειρήσουμε να αναλύσουμε στην επόμενη παράγραφο.

## ΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΗΓΜΕΝΕΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

### Η έννοια της τάσεως

Ας θεωρήσουμε σώμα το οποίο φορτίζεται με ένα σύστημα δυνάμεων  $F_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  και ένα σύστημα ροπών  $C_j$ ,  $j=1,2,\dots,m$  (σχήμα 1).

Τα συστήματα δυνάμεων και ροπών είναι τέτοια, ώστε το σώμα να ευρίσκεται σε ισορροπία. Έστω ότι με τη βοήθεια ενός φανταστικού επιπέδου τέμνεται ένα τμήμα του σώματος, το οποίο και αφαιρείται, όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Είναι προφανές, ότι για να διατηρηθεί η ισορροπία του εναπομένοντος τμήματος, θα πρέπει να αντικατασταθεί η δράση του αφαιρεθέντος τμήματος με ένα σύστημα δυνάμεων, τις λεγόμενες εσωτερικές δυνάμεις.

Αν εστιάσουμε τη μελέτη μας σε ένα στοιχειώδες εμβαδόν της επιφάνειας  $\Delta a_z$ , η τοπική δράση του απομνηθέντος τμήματος αντιστοιχεί σε μία στοιχειώδη δύναμη  $\Delta R$ . Το όριο του πηλίκου της στοιχειώδους δυνάμεως  $\Delta R$  προς το στοιχειώδες εμβαδόν  $\Delta a_z$ , όταν το εμβαδόν αυτό τείνει στο μηδέν, ορίζεται ως τάση. Σε περίπτωση που το διάνυσμα  $\Delta R$  είναι κάθετο στην επιφάνεια τομής, η τάση ονομάζεται ορθή:

$$\sigma_{zz} = \lim_{\Delta a_z \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta a_z} \quad (1)$$

Σε περίπτωση που το διάνυσμα της δυνάμεως είναι εφαπτόμενο στην επιφάνεια τομής, η τάση ονομάζεται διατμητική:

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta a_z \rightarrow 0} \frac{\Delta R_x}{\Delta a_z}, \quad \tau_{zy} = \lim_{\Delta a_z \rightarrow 0} \frac{\Delta R_y}{\Delta a_z} \quad (2)$$

όπου  $\Delta R_x$  και  $\Delta R_y$  οι συνιστώσες της δυνάμεως  $\Delta R$  κατά τους άξονες  $x$  και  $y$  καρτεσιανού συστήματος αναφοράς  $xyz$ , οι οποίοι κείνται εντός του επιπέδου της τομής.

Ειδικά για την περίπτωση γραμμικού δομικού μέλους, με σταθερή διατομή εμβαδού  $A$ , το οποίο φορτίζεται με αξονική δύναμη  $P$  εφελκυστική ή θλιπτική, παράλληλη με τον άξονα του μέλους, και ομοιόμορφα κατανεμημέ-

νη στη διατομή του, η τάση ορίζεται απλώς ως το πηλίκο της δυνάμεως προς το εμβαδόν της διατομής, ήτοι:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (3)$$

Δεδομένου ότι η δύναμη στο διεθνές σύστημα μονάδων SI μετράται σε Newton (N), και το εμβαδόν σε  $m^2$ , η τάση μετράται σε Pascal (Pa):

$$1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (4)$$

Στην πράξη χρησιμοποιούνται πολλαπλάσια του Pa, κυρίως το MPa ( $=10^6$  Pa) και το GPa ( $=10^9$  Pa).

### Η έννοια της ανηγμένης παραμόρφωσης (strain)

Περιοριζόμενοι κατ' αρχήν σε μονοδιάστατη θεώρηση, ας εξετάσουμε το μέλος του σχήματος 3, το οποίο επιμηκύνεται υπό την επίδραση αξονικής, εφελκυστικής έστω, δυνάμεως  $P$ . Έστω στοιχειώδες τμήμα αρχικού μήκους  $\Delta x$ , το οποίο υπό την επίδραση της  $P$  αποκτά τελικό μήκος  $\Delta x + \Delta \delta$  (σχήμα 3β). Το όριο του πηλίκου της αλλαγής του μήκους  $\Delta \delta$  προς το αρχικό μήκος  $\Delta x$ , όταν το  $\Delta x$  τείνει στο μηδέν, καλείται ανηγμένη ορθή παραμόρφωση (normal strain), ήτοι:

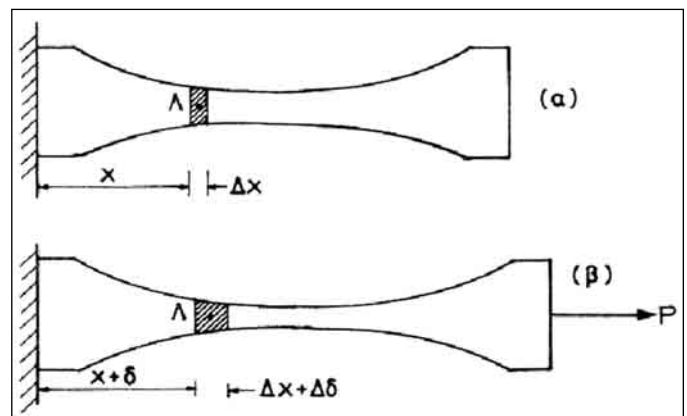
$$\epsilon_{xx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} \quad (5)$$

Ειδικά στην περίπτωση που το δοκίμιο έχει σταθερή κατά μήκος διατομή, η ορθή ανηγμένη παραμόρφωση ορίζεται απλώς ως το πηλίκο της ολικής αλλαγής μήκους  $\Delta L$  προς το αρχικό μήκος,  $L_0$ , ήτοι:

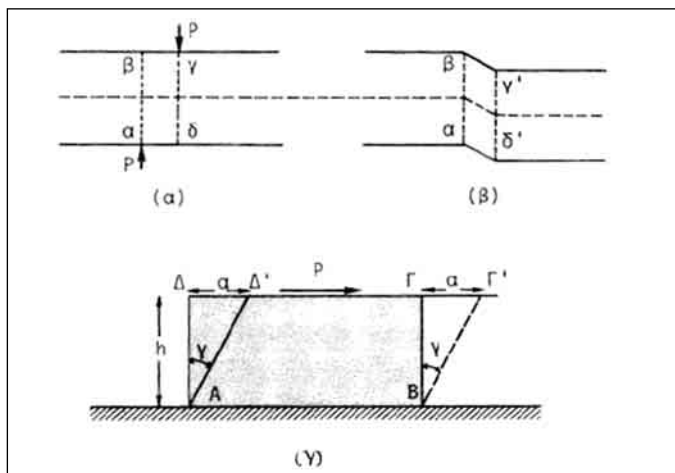
$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (6)$$

Προφανώς ως πηλίκο μηκών η ορθή παραμόρφωση είναι καθαρός αριθμός χωρίς μονάδα.

Στη συνέχεια, ας εξετάσουμε ένα διδιάστατο σώμα με



**Σχήμα 3.** Η ορθή ανηγμένη παραμόρφωση.



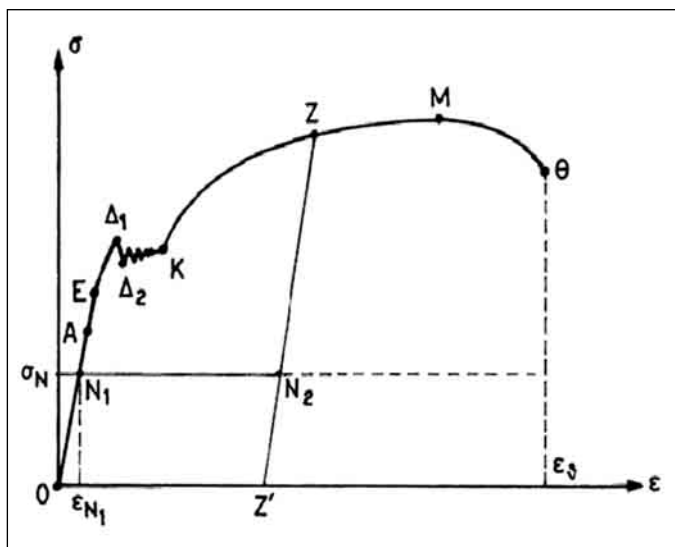
**Σχήμα 4.** Η διατμητική παραμόρφωση.

τη μορφή λεπτής πλάκας (σχήμα 4γ), πακτωμένο στερεά στη μία πλευρά, το οποίο φορτίζεται με μία "διατμητική" δύναμη  $P$ , δηλαδή με δύναμη εφαπτόμενη στη μία πλευρά της πλάκας.

Προφανώς υπό την επίδραση της φορτίσεως αυτής οι αρχικώς ορθές γωνίες της πλάκας θα μεταβληθούν κατά μία γωνία  $\gamma$  και θα μετατραπούν είτε σε οξείες είτε σε αμβλείες γωνίες (σχήμα 4α,β). Η μεταβολή των αρχικώς ορθών γωνιών ορίζεται ως διατμητική παραμόρφωση (shear strain) και είναι επίσης καθαρός αριθμός.

### ΑΣΤΟΧΙΑ ΥΠΟ ΜΟΝΟΑΞΟΝΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ

Είναι συνήθης πρακτική να παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των πειραμάτων μονοαξονικού εφελκυσμού ή θλίψεως με τη βοήθεια του κλασικού διαγράμματος τά-



**Σχήμα 5.** Τυπικό διάγραμμα τάσεων - παραμορφώσεων ολκίμου υλικού.

σεων - παραμορφώσεων. Ένα τέτοιο διάγραμμα φαίνεται στο σχήμα 5 για κάποιο ολκίμο μεταλλικό υλικό.

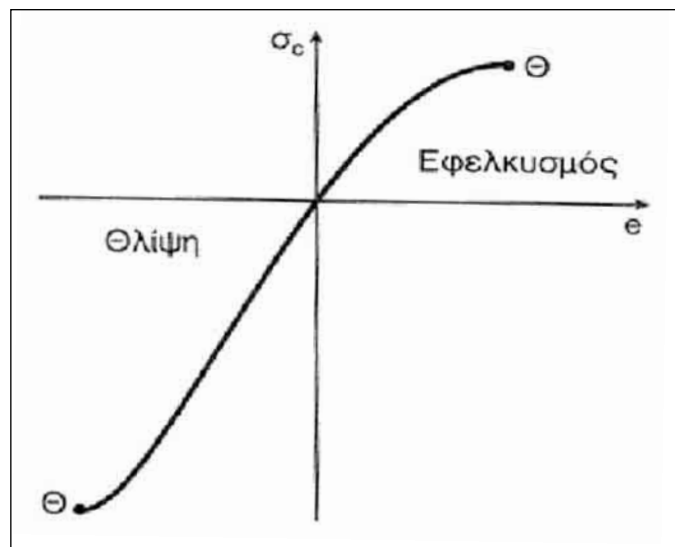
Στην περίπτωση αυτή είναι σχετικά εύκολο να ορίσουμε την οριακή συνθήκη αστοχίας (κριτήριο αστοχίας), θέτοντας άνω όριο είτε στην επιβαλλόμενη τάση (την τάση διαρροής, σημεία  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$  του διαγράμματος, τα σημεία δηλαδή στα οποία εμφανίζονται για πρώτη φορά μη αντιστρεπτά φαινόμενα που αντιστοιχούν σε μόνιμες παραμορφώσεις), είτε στην εμφανιζόμενη ορθή ανηγμένη παραμόρφωση, είτε ακόμα και στην αποθηκευόμενη στο σώμα ελαστική ενέργεια παραμορφώσεων (την ενέργεια που αποθηκεύεται στο σώμα μέχρι αυτό να φτάσει στο σημείο διαρροής, που αναπαρίσταται από το εμβαδόν της περιοχής που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη τάσεων-παραμορφώσεων μέχρι το σημείο διαρροής). Μαθηματικά, τα κριτήρια αυτά αστοχίας θα έχουν, αντιστοίχως, την κάτωθι απλή μορφή:

$$\sigma \geq \sigma_{\Delta}, \quad \epsilon \geq \epsilon_{\Delta}, \quad W \geq W_{\text{elastic}} \quad (7)$$

Αντίστοιχα, στην περίπτωση ψαθυρών υλικών, για τα οποία το διάγραμμα τάσεων - παραμορφώσεων υπό μονοαξονικό εφελκυσμό ή θλίψη έχει τη μορφή του σχήματος 6, όπου δεν είναι εύκολος ή καν δυνατός ο εντοπισμός του σημείου διαρροής, ως κριτήριο αστοχίας μπορεί να θεωρηθεί η υπέρβαση της ορθής τάσεως θραύσεως ή της ορθής ανηγμένης παραμορφώσεως θραύσεως (σημείο  $\Theta$  στο σχήμα 6).

Στην περίπτωση αυτή το κριτήριο αστοχίας θα έχει την επίσης απλή μαθηματική έκφραση:

$$\sigma \geq \sigma_{\Theta}, \quad \epsilon \geq \epsilon_{\Theta} \quad (8)$$



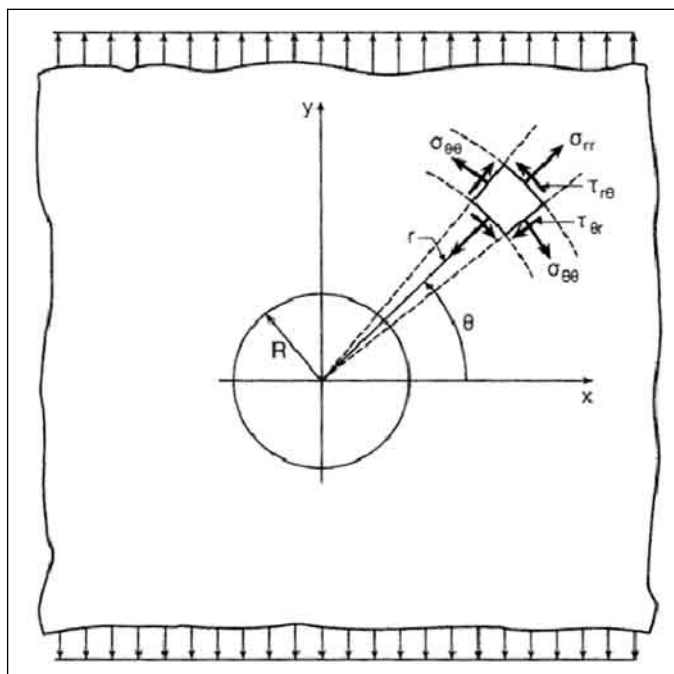
**Σχήμα 6.** Τυπικό διάγραμμα τάσεων - παραμορφώσεων ψαθυρού υλικού σε εφελκυσμό και θλίψη.

Δυστυχώς στην καθημερινή πράξη, οι εμφανιζόμενες φορτίσεις απέχουν πολύ από την ιδεατή μονοαξονική κατάσταση, δεδομένου ότι τα δομικά μέλη δέχονται συστήματα δυνάμεων και ροπών κατά τη διεύθυνση διαφορετικών μεταξύ τους αξόνων, με αποτέλεσμα η τελική φόρτιση να μην περιγράφεται από μία μόνον τάση (ή παραμόρφωση) αλλά από ένα σύνολο τάσεων (ή παραμορφώσεων), οι οποίες απαρτίζουν τον ταυνοστή των τάσεων και γράφονται με τη μορφή:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad \text{ή} \quad \varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}$$

όπου οι παράγοντες  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_{xz}$ ... είναι απλές συναρτήσεις των αντιστοίχων διατμητικών παραμορφώσεων  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{zx}$ ... Δεδομένου ότι όλες οι συνιστώσες των ταυνοστών τάσεων και παραμορφώσεων αλληλοεπηρεάζονται κατά τη διάρκεια της φορτίσεως του σώματος, καθίσταται σαφές ότι τα απλά μονοπαραμετρικά κριτήρια αστοχίας, όπως αυτά των εξισώσεων 7 και 8, δεν είναι εφαρμόσιμα.

Παρεμφερείς καταστάσεις μπορεί να εμφανιστούν ακόμα και στην περίπτωση μονοαξονικών εξωτερικών φορτίσεων, αν το φορτιζόμενο σώμα φέρει ασυνέχειες μορφής ρωγμής, εγκοπής, οπής κ.λπ., όπως φαίνεται στο σχήμα 7, όπου ένα επίπεδο σώμα με κυκλική οπή φορτίζεται μονοαξονικά. Έχει αποδειχθεί ότι σε τυχαίο σημείο του σώματος στη θέση  $(r, \theta)$  εμφανίζονται τέσσερις



**Σχήμα 7.** Επίπεδο σώμα με ασυνέχεια τύπου οπής υπό μονοαξονική φόρτιση.

συνιστώσες τάσεις, παρά το γεγονός ότι εξωτερικά επιβάλλεται μία και μοναδική τάση. Τι συμβαίνει στις περιπτώσεις αυτές με την οριακή συνθήκη αστοχίας;

Για τη μελέτη της αστοχίας των σωμάτων στις περιπτώσεις αυτές, στις οποίες τα τασικά και τα παραμορφωσιακά πεδία δεν δύνανται να περιγραφούν με τη βοήθεια μίας μοναδικής συνιστώσας, έχει εισαχθεί ήδη από τον 18ο αιώνα μια σειρά κριτηρίων αστοχίας, από τα οποία σήμερα χρησιμοποιούνται σε πρακτικές εφαρμογές κυρίως δύο: (α) το κριτήριο του Mises και (β) το κριτήριο του Mohr, τα οποία και περιγράφονται στην επόμενη παράγραφο.

## ΑΣΤΟΧΙΑ ΥΠΟ ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΑΤΑΠΟΝΗΣΗ

Πριν προχωρήσουμε στην περιγραφή των ανωτέρω κριτηρίων, είναι σκόπιμο να παραθέσουμε κάποιες σκέψεις του εισηγητή ενός εξ αυτών, του Otto Mohr<sup>6</sup>: "...Σε συζητήσεις με διακεκριμένους επιστήμονες συχνά αντιμετωπίζω την άποψη ότι η προσπάθεια για τη θεμελίωση μίας θεωρίας για την αντοχή των υλικών είναι μάταιος κόπος, δεδομένου ότι ούτε ομογενή σώματα ούτε ομογενείς τασικές καταστάσεις υπάρχουν. Επομένως, δεν υπάρχει άλλος τρόπος για τη μελέτη της αστοχίας υπό σύνθετη καταπόνηση από την εκτέλεση ειδικών πειραμάτων για κάθε περίπτωση. Ομολογώ ότι δεν έχω να αντιπαραθέσω κάποιο επείγουσα στο συλλογισμό αυτό. Και όμως επί εκατό και πλέον έτη εμφανίζονται ξανά και ξανά θεωρίες για την περιγραφή της αστοχίας των υλικών και την εύρεση της ενυπάρχουσας τάξεως, η οποία όμως σκιάζεται από την πληθώρα των πειραματικών αποτελεσμάτων. Καταλήγω, επομένως, στο συμπέρασμα ότι αν επιτύχει κάποιος να διατυπώσει μερικούς κανόνες στους οποίους θα εντάσσονται και στους οποίους θα υπακούουν πολλά πειραματικά δεδομένα, δεν θα έχει ανακαλυφθεί μεν κάποιος φυσικός νόμος, αλλά τουλάχιστον θα έχει ευρεθεί κάποιο μέσο για την εκτίμηση της ορθότητας των νέων πειραματικών αποτελεσμάτων". Είναι λοιπόν σκόπιμο να έχουμε τα ανωτέρω κατά νου, ώστε να αξιολογούμε σωστά τις δυνατότητες των κριτηρίων, τα οποία θα αναλυθούν, και να μην τα θεωρούμε ως μέσο για την πρόβλεψη της αστοχίας οποιουδήποτε σώματος υπό οιοσδήποτε συνθήκες φορτίσεως.

## Το κριτήριο αστοχίας του von Mises

Η μαθηματική διατύπωση του κριτηρίου αυτού διατυπώθηκε ήδη από το 1913 από τον von Mises<sup>5</sup>, όμως η φυσική του ερμηνεία εδόθη σχεδόν είκοσι έτη αργότερα από τον Hencky<sup>3</sup>. Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό ένα υλικό αστοχεί, όταν το τμήμα της αποθηκευόμενης σε αυτό ενέργειας, το οποίο ευθύνεται για την αλλαγή σχήματος

του σώματος (η λεγόμενη ελαστική ενέργεια στρεβλώσεως), υπερβεί κάποιο κρίσιμο όριο. Εκφεύγει των ορίων του παρόντος, πάντως δύναται να αποδειχθεί ότι με τη βοήθεια των συνιστωσών του τανυστή των τάσεων το κριτήριο αυτό παίρνει τη μαθηματική έκφραση:

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 + \sigma_{xy}^2) = 6k^2 \quad (9)$$

Στην εξίσωση 9 το  $k$  συμβολίζει μία σταθερά του υλικού, την τάση διαρροής υπό διατμητική φόρτιση, η οποία δύναται να προσδιοριστεί με ένα απλό πείραμα καθαρής στρέψεως.

Η γεωμετρική αναπαράσταση του κριτηρίου του von Mises στο χώρο των τάσεων φαίνεται στο σχήμα 8. Είναι μία κυλινδρική επιφάνεια με άξονα ισοκεκλιμένο ως προς τους τρεις άξονες του συστήματος αναφοράς. Οποιοσδήποτε συνδυασμός τάσεων αντιστοιχεί σε σημείο εντός της κυλινδρικής επιφάνειας, είναι ανεκτός από το υλικό και δεν οδηγεί σε αστοχία. Απεναντίας, οποιοσδήποτε συνδυασμός τάσεων αντιστοιχεί σε σημείο εκτός της κυλινδρικής επιφάνειας, δεν είναι ανεκτός από το υλικό και θα επιφέρει αστοχία.

Στην περίπτωση διδιάστατων προβλημάτων η κυλινδρική επιφάνεια εκφυλίζεται σε μία ελλειπτική γραμμή (σχήμα 9), όπου και πάλι συνδυασμοί τάσεων, εκτός της ελλείψεως, οδηγούν σε αστοχία.

Αν και το κριτήριο Mises τυχάνει ευρύτατης εφαρμογής λόγω κυρίως της σαφούς φυσικής του σημασίας, εν τούτοις επιβάλλεται να αναφερθούν ορισμένα αδύνατα σημεία του:

- Η μαθηματική του θεμελίωση προβλέπει ταυτόσημη αντοχή του υλικού σε εφελκυσμό και σε θλίψη, γεγονός το οποίο περιορίζει την εφαρμογή του αποκλειστικά και

μόνον σε ιδιαίτερα όλκιμα υλικά.

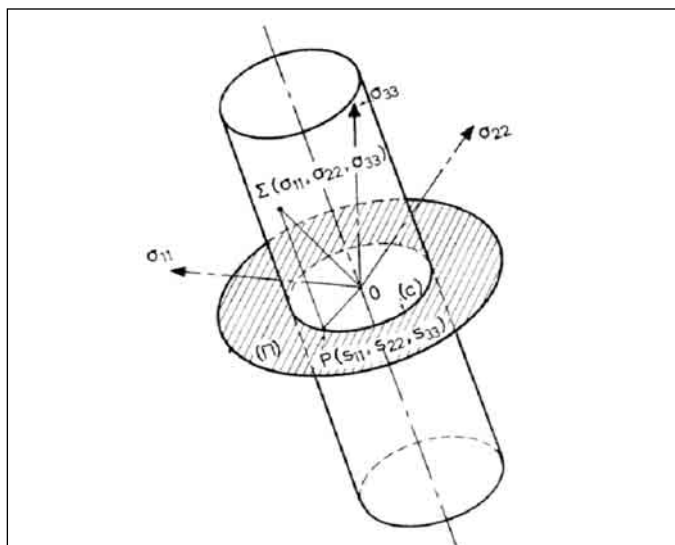
- Προβλέπει "άπειρη" αντοχή των υλικών, όταν αυτά φορτίζονται με υδροστατική θλίψη ή με ομογενή τριαξονικό εφελκυσμό (η κυλινδρική επιφάνεια δεν έχει βάσεις ούτε στο θετικό ούτε στο αρνητικό ογδημόριο). Στην πρώτη περίπτωση η υπόθεση είναι ανεκτή και έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά από τον Bridgman<sup>1</sup>. Απεναντίας η δεύτερη περίπτωση, αν και ασυνήθιστη στις εφαρμογές της πράξεως, δεν μπορεί να δικαιολογηθεί με φυσικά επιχειρήματα ή με τη βοήθεια πειραματικών δεδομένων.

- Οι προβλέψεις του κριτηρίου είναι ικανοποιητικές στις περισσότερες περιπτώσεις, με εξαίρεση την περίπτωση διαξονικής φορτίσεως συνδυασμένου εφελκυσμού και θλίψεως (δευτερο και τέταρτο τεταρτημόριο στο σχήμα 9).

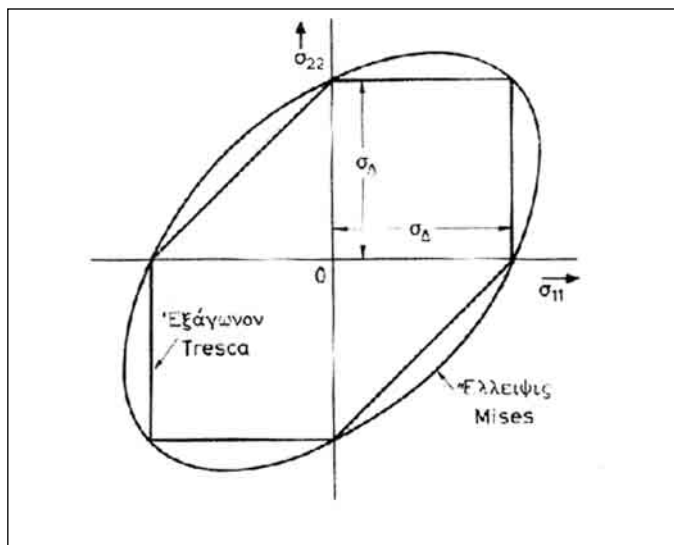
### Το κριτήριο αστοχίας του Mohr

Το κριτήριο αυτό διατυπώθηκε αρχικώς από τον Coulomb<sup>2</sup> ήδη από το 1773, σε μια προσπάθειά του να ερμηνεύσει την αστοχία των γαιωδών υλικών, και έλαβε την οριστική του μορφή στις αρχές του εικοστού αιώνα από τον Mohr<sup>6</sup>. Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, ένα υλικό υπό τριαξονική καταπόνηση αστοχεί όταν επιτευχθεί κατάλληλος συνδυασμός της μέγιστης ορθής τάσεως,  $\sigma$ , και της αντίστοιχης διατμητικής τάσεως,  $\tau$ , οι οποίες δρουν στα επίπεδα ολισθήσεως του σώματος. Το πρόβλημα έγκειται στο γεγονός ότι ο Mohr δεν καθόρισε τον κατάλληλο συνδυασμό των  $\sigma$  και  $\tau$ , ο οποίος θα επιφέρει την αστοχία. Ο συνδυασμός αυτός είναι διαφορετικός για κάθε υλικό και μόνο πειραματικά μπορεί να προσδιοριστεί. Το σημείο αυτό αποτελεί το μεγάλο πλεονέκτημα και ταυτόχρονα το μεγάλο μειονέκτημα του εν λόγω κριτηρίου.

Αν και πάλι εκφεύγει των ορίων του παρόντος, σημει-



Σχήμα 8. Ο τόπος αστοχίας κατά Mises.



Σχήμα 9. Το κριτήριο Mises για επίπεδη φόρτιση.

ώνουμε ότι μαθηματικά το κριτήριο του Mohr μπορεί να διατυπωθεί ως:

$$\tau = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2} \left[ 1 - \left( \frac{d(\sigma_{11} - \sigma_{33})}{d(-\sigma_{11} + \sigma_{33})} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

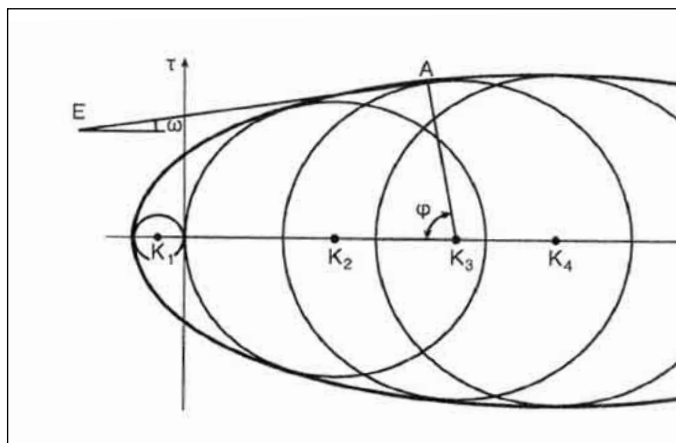
όπου  $\sigma_{11}$  και  $\sigma_{33}$  οι ακρότατες (μέγιστη και ελάχιστη) συνιστώσες του κυρίου τανυστή των τάσεων.

Η γεωμετρική αναπαράσταση του κριτηρίου του Mohr επιτυγχάνεται μόνο μετά από μία σειρά απλών πειραμάτων (εφελκυσμού, θλίψεως, τριαξονικής καταπόνησης) και έχει εν γένει τη μορφή η οποία φαίνεται στο σχήμα 10. Είναι δηλαδή η κοινή εφαπτομένη (περιβάλλουσα καμπύλη) μιας σειράς κύκλων, κάθε ένας από τους οποίους περιγράφει την αστοχία του συγκεκριμένου υλικού υπό δεδομένη φόρτιση. Επί παραδείγματι, ο κύκλος κέντρου  $K_1$  στο σχήμα 10 περιγράφει την αστοχία υπό εφελκυστική φόρτιση, ενώ ο κύκλος κέντρου  $K_2$  περιγράφει την αστοχία υπό θλιπτική φόρτιση.

Η φυσική σημασία της περιβάλλουσας καμπύλης έγκειται στο ότι αν επιτευχθεί η σχεδίασή της με τη βοήθεια στοιχειωδών πειραμάτων, είναι δυνατόν να αποφανθούμε για το εάν κάποια σύνθετη καταπόνηση θα επιφέρει ή όχι αστοχία. Εφ' όσον ο αντίστοιχος συνδυασμός ορθής και διατμητικής τάσεως ( $\sigma$ ,  $\tau$ ) κείται στο εσωτερικό της περιβάλλουσας, η φόρτιση είναι ανεκτή από το υλικό. Στην αντίθετη περίπτωση ο συνδυασμός θα οδηγήσει σε αστοχία.

Το κριτήριο του Mohr ευρίσκει μέχρι σήμερα ευρεία εφαρμογή, ιδιαίτερα για την πρόβλεψη της συμπεριφοράς των ψαθυρών υλικών, για τα οποία είναι αδύνατη η εφαρμογή του κριτηρίου Mises. Αν και οι προβλέψεις του είναι εν γένει ικανοποιητικές και επαληθεύονται από το πείραμα, επιβάλλεται στο σημείο αυτό να τονιστούν ορισμένες αδυναμίες της θεωρίας του Mohr:

- Προβλέπει αστοχία αποκλειστικά και μόνο σε επίπε-



**Σχήμα 10.** Η περιβάλλουσα αστοχίας σύμφωνα με το κριτήριο Mohr.

δα κεκλιμένα σε σχέση με τη διεύθυνση φορτίσεως. Αστοχία μέσω της διάδοσης ρωγμών παράλληλων με τον άξονα φορτίσεως είναι ασύμβατη με τις υποθέσεις του κριτηρίου. Εντούτοις, πρόσφατα πειράματα σε γαιώδη υλικά<sup>10</sup> αλλά και σε σύγχρονα σύνθετα υλικά, τα οποία κατά κόρον χρησιμοποιούνται στην εμβιομηχανική, έχουν αποδείξει ότι αν η τριβή των παρειών των θλιβομένων δοκιμίων μειωθεί σημαντικά, η αστοχία επέρχεται με τη μορφή ρωγμών παράλληλων με τον άξονα φορτίσεως.

- Η κλίση της περιβάλλουσας καμπύλης εξαρτάται από το επίπεδο των τάσεων.

- Δεν υπάρχει ενιαία μαθηματική έκφραση για την περιβάλλουσα καμπύλη.

- Απαιτείται μεγάλος σχετικά αριθμός πειραμάτων για τον προσδιορισμό της ακριβούς μορφής του τόπου αστοχίας.

Καθίσταται στο σημείο αυτό προφανές ότι τα περιγραφέντα κριτήρια, παρά τα όποια πλεονεκτήματά τους, τα οποία τα έχουν καταστήσει ιδιαίτερα εύχρηστα εργαλεία για τις κλασικές εφαρμογές του μηχανικού, έχουν εντούτοις σημαντικές αδυναμίες, οι οποίες περιορίζουν την εφαρμογή τους, ιδιαίτερα στην περίπτωση των σύγχρονων σύνθετων υλικών και κραμάτων, τα οποία κυρίως απασχολούν την επιστήμη της εμβιομηχανικής.

Στην κατεύθυνση αυτή έχουν εισαχθεί ορισμένα νέα κριτήρια αστοχίας, τα οποία θεραπεύουν κάποιες από τις αδυναμίες των κλασικών κριτηρίων αστοχίας. Δυστυχώς, η επιτυχία αυτή αντισταθμίζεται, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, είτε από την αναπόφευκτη μαθηματική πολυπλοκότητα των κριτηρίων αυτών είτε από τον αυξημένο αριθμό πειραματικών σταθερών, οι οποίες απαιτούνται για την ορθή εφαρμογή τους.

## ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΑΠΟΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΣΤΟΧΙΑ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΥΠΟ ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΑΤΑΠΟΝΗΣΗ

### Το κριτήριο του ελλειπτικού παραβολοειδούς

Διατυπώθηκε από τον Theocaris<sup>9</sup> στο τέλος της δεκαετίας του 1990. Αποτελεί βελτίωση του κριτηρίου Mises μέσω της εισαγωγής μίας δεύτερης σταθεράς στην αρχική έκφραση του κριτηρίου, το οποίο διατυπώνεται μαθηματικά ως εξής:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 2(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})(\sigma_{oc} - \sigma_{ot}) - 2\sigma_{oc}\sigma_{ot} = 0 \quad (11)$$

Η γεωμετρική αναπαράσταση του κριτηρίου για δισδιάστατη φόρτιση φαίνεται στο σχήμα 11. Παρατηρούμε ότι η επιφάνεια αστοχίας έχει τη μορφή μη συμμετρικής ως προς το κέντρο των αξόνων ελλείψεως (σε περίπτωση τρισδιάστατης φόρτισης είναι επιφάνεια ελλειπτικού

παρβολοειδούς). Παρατηρούμε από το σχήμα αυτό ότι η σύμπτωση των πειραματικών δεδομένων με τις προβλέψεις του κριτηρίου είναι ικανοποιητική, ιδιαίτερα στην περιοχική συνδυασμένου εφελκυσμού-θλίψεως, περιοχική στην οποία η θεωρία Mises εμφανίζει τις μεγαλύτερες αποκλίσεις από το πείραμα. Ταυτόχρονα, αίρεται και η λίαν περιοριστική υπόθεση της ισότητας των τάσεων διαρροής υπό θλιπτικά και υπό εφελκυστικά φορτία.

### Η θεωρία της διαχύσεως των τάσεων

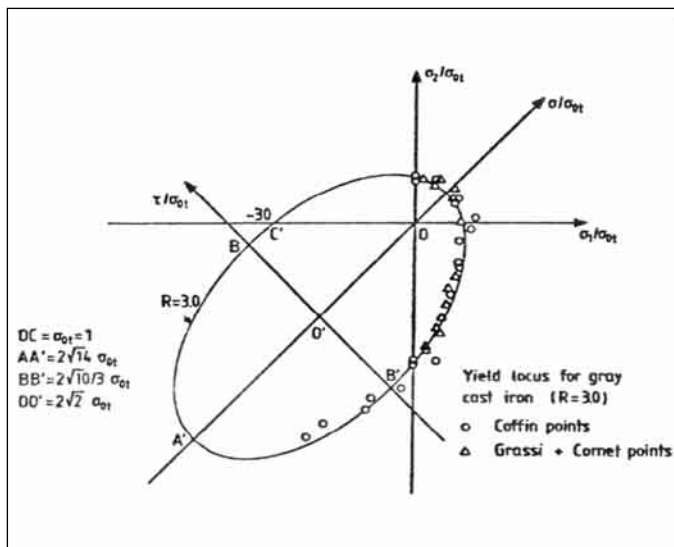
Διατυπώθηκε το 1998 από τους Vardoulakis και συν<sup>11</sup> και βρίσκει ιδιαίτερη εφαρμογή στην περίπτωση υλικών των οποίων δεν είναι δυνατόν να αγνοηθεί η μικροδομή, όπως συμβαίνει και με τα οστά του ανθρώπινου σκελετού, και τα οποία αστοχούν μέσω της διάδοσης ρωγμών παράλληλων με τον άξονα φορτίσεως.

Η θεωρία αυτή εισάγει ένα χαρακτηριστικό μήκος, το οποίο συσχετίζεται με το μέσο μήκος των τυχαίως κατανεμημένων ρωγμών, οι οποίες είτε προϋπάρχουν είτε εμφανίζονται στο εσωτερικό του δοκιμίου κατά τη διάρκεια της φορτίσεως.

Αν και η μαθηματική έκφραση του κριτηρίου είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη, εντούτοις μπορούμε να αναφέρουμε ότι το κύριο χαρακτηριστικό της είναι η περιγραφή των φαινομένων όχι με τη βοήθεια της ανηγμένης ορθής παραμόρφωσης (πάγια τακτική στα περισσότερα κριτήρια), αλλά με τη βοήθεια της ανηγμένης ως προς την ακτίνα του κυλινδρικού δοκιμίου διαφοράς των μετατοπίσεων,  $w$ , από τη μετατόπιση που αντιστοιχεί στο μέγιστο φορτίο,  $w_p$ :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_p} = f(\Delta\tilde{w}) = f\left(\frac{w-w_p}{R}\right) \quad (12)$$

Στο σχήμα 12 διακρίνονται οι προβλέψεις του κριτηρίου



**Σχήμα 11.** Ο τόπος αστοχίας σύμφωνα με το κριτήριο του ελλειπτικού παρβολοειδούς.

ου μαζί με σειρά πειραματικών δεδομένων για ένα σύνθετο αμμόδες υλικό, του οποίου η αστοχία δεν δύναται να περιγραφεί από κάποιο κλασικό κριτήριο. Είναι προφανές ότι η συμφωνία είναι ιδιαίτερα ικανοποιητική.

### Το T-κριτήριο αστοχίας

Διατυπώθηκε από τους Theocaris and Andrianopoulos<sup>7</sup> στη δεκαετία του 1980. Προβλέπει ότι αστοχία επέρχεται όταν εξαντληθεί η ικανότητα των υλικών να απορροφούν ελαστική ενέργεια, είτε στρεβλώσεως,  $T_D$  (για την αλλαγή σχήματος), είτε διογκώσεως,  $T_V$  (για την αλλαγή όγκου). Η μαθηματική διατύπωση του κριτηρίου είναι ιδιαίτερα απλή:

$$T_V \geq T_{V,0} \quad \text{ή} \quad T_D \geq T_{D,0} \quad (13)$$

Στην ανωτέρω εξίσωση  $T_{V,0}$  και  $T_{D,0}$  είναι πειραματικά προσδιοριζόμενες σταθερές του υλικού και ισχύει:

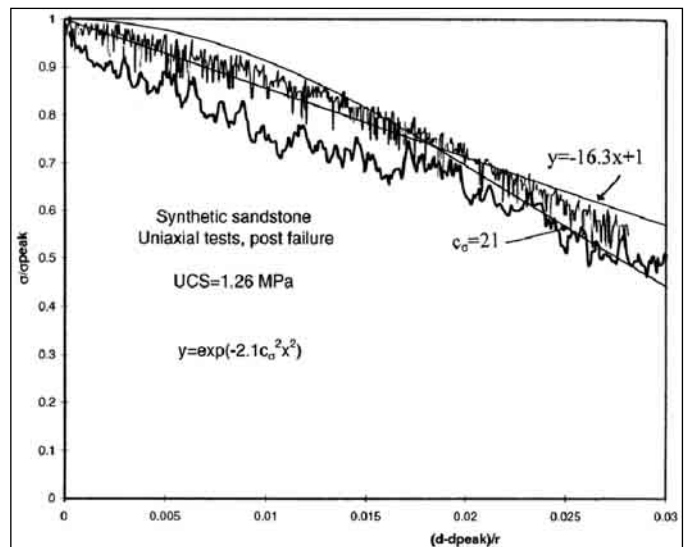
$$T_V = \frac{1}{2K} p^2, \quad T_D = \frac{1}{6G} \tau_e^2 \quad (14)$$

όπου  $K$  και  $G$  είναι τα μέτρα διογκώσεως και στρεβλώσεως (ή στρέψεως ή διατμήσεως) του υλικού, ενώ τα  $p$  και  $\tau_e$  γράφονται ως:

$$p = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (15)$$

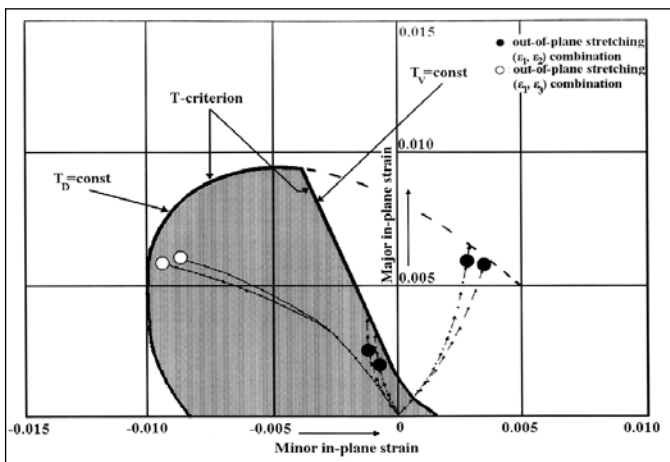
$$\tau_e = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2]^{1/2}$$

Το κριτήριο αυτό έχει αποδειχθεί ιδιαίτερα αποτελε-



**Σχήμα 12.** Οι προβλέψεις της θεωρίας διαχύσεως των τάσεων για την αστοχία σύνθετου υλικού.





**Σχήμα 13.** Οι προβλέψεις του T-κριτηρίου και τα σχετικά πειραματικά αποτελέσματα.

σηματικό για την πρόβλεψη της αστοχίας τόσο μακροσκοπικά ασυνεχών (προρηγματωμένων) υλικών<sup>8</sup>, όσο και συνεχών σύνθετων υλικών, τα οποία υφίστανται πολυαξονική καταπόνηση μέσω διαδικασιών μορφοποίησης<sup>4</sup>, όπως φαίνεται στο σχήμα 13, στο οποίο έχουν σχεδιαστεί οι προβλέψεις του κριτηρίου σε συνδυασμό με μερικά χαρακτηριστικά πειραματικά αποτελέσματα.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σήμερα, έναν αιώνα μετά τον αφορισμό του Mohr ότι δεν είναι εφικτή η διατύπωση μίας ενοποιημένης θεωρίας αστοχίας των υλικών, και παρά τις συνεχείς προσπάθειες των θεραπόντων της Αντοχής των Υλικών και το μεγάλο αριθμό των προταθέντων κριτηρίων, δεν είναι διαθέσιμη μία γενική θεωρία για την πρόβλεψη της αστοχίας όλων των υλικών. Οι κλασικές θεωρίες των Mohr και Mises εφαρμόζονται για τα όλκιμα και τα ψαθυρά υλικά αντίστοιχα και οι προβλέψεις τους μπορούν να θεωρηθούν ικανοποιητικές για τις συνήθεις εφαρμογές της πράξης του Μηχανικού.

Η αστοχία, όμως, των σύγχρονων τεχνητών υλικών, τα οποία χρησιμοποιούνται ευρέως στην Εμβιομηχανική, δεν είναι προβλέψιμη από τις κλασικές θεωρίες. Οι διατυπωθείσες προσφάτως επεκτάσεις και τροποποιήσεις των θεωριών αυτών, καθώς και οι πλέον πρόσφατα εισαχθείσες θεωρίες αστοχίας μοιάζει να δίνουν ικανοποι-

τικές απαντήσεις στο πρόβλημα. Είναι, όμως, αναμφίβολα σαφώς πιο περίπλοκες από μαθηματική άποψη και απαιτείται προσεκτική αιτιολόγηση της εφαρμογής τους σε κάθε συγκεκριμένο πρόβλημα.

Η τελική αποδοχή των θεωριών αυτών από την επιστημονική κοινότητα και η ευρεία εφαρμογή τους στην πράξη θα επέλθει, αφού προηγουμένως περάσουν με επιτυχία τη συστηματική πειραματική επαλήθευση για μεγάλη σειρά υλικών. Μέχρις ότου, όμως, η λυδία λίθος του πειράματος ανάψει το πράσινο φως για την οριστική αποδοχή κάποιου ή κάποιων εκ των ως άνω κριτηρίων, το πείραμα θα εξακολουθεί να παραμένει το μοναδικό διαθέσιμο και απόλυτα ασφαλές μέσο για την πρόβλεψη της αστοχίας των υλικών, όταν αυτά ευρίσκονται υπό συνθήκες σύνθετης φόρτισης.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Bridgman PW. The physics of high pressure. London Bell and Sons, 1958.
2. Coulomb CA. Mem Math Phys 1773, 7.
3. Hencky H. Zur Theorie plastischer Deformationen, Z Angew Math Mech 1924, 4:323.
4. Kourkoulis SK, Andrianopoulos NP. Experimental evaluation of strain paths driving to failure in sheet metal forming. 11<sup>th</sup> Int. Con. on Exp. Mech., Oxford. Ed. Allison IM, Balkema, 1998, II:1033-1038.
5. Mises R von. Mechanik der festen Koerper im plastisch-deformablen Zustand, Nachr Ges Wiss Goettingen, Math-physik Klass 1913, 582-583.
6. Mohr O. Welche Umstaende bedingen die Elastizitaetsgrenze und den Bruch eines Materials? Zeit-schrift des Vereines deutscher Ingenieure 1900, 44:1-12.
7. Theocaris PS, Andrianopoulos NP. The Mises elastic-plastic boundary as core region in fracture criteria. Engng Fract Mech 1982, 16:425-432.
8. Theocaris PS, Andrianopoulos NP, Kourkoulis SK. The Angle of Initiation and Propagation of Cracks in Ductile Media. Experimental Mechanics 1987, 27:120-125.
9. Theocaris PS. Variations on the theme of fracture criteria. Engng Fract Mech 1988, 36:1-9.
10. Vardoulakis I, Kourkoulis SK, Zambas C. Modeling of the mechanical behavior of a conchyliates shell-stone. 2<sup>nd</sup> Int. Symp. on Hard Soils Soft Rocks, Naples. Eds Evangelista A, Picarelli, L, Balkema, 1998, 911-922.
11. Vardoulakis I, Labuz JF, Papamichos E, Tronvoll J. Continuum fracture mechanics of uniaxial compression on brittle materials. Int J Solids Structures 1998, 35:4313-4335.